

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**

**Директор института нано-, био-,  
информационных, когнитивных  
и социогуманитарных наук и  
технологий**

**П.А. Форш**

**Рабочая программа дисциплины (модуля)**

<b>по дисциплине:</b>	Аналитическая геометрия
<b>по направлению:</b>	Прикладные математика и физика
<b>профиль подготовки:</b>	Физика атомных ядер и элементарных частиц, физика высоких энергий Физтех-школа природоподобных, плазменных и ядерных технологий им. И.В. Курчатова Кафедра математики и математических методов физики
<b>курс:</b>	1
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 2 (весенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 45 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Количество контрольных работ, заданий: 2

Программу составил: А.И. Шафаревич, д-р физ.-мат. наук, профессор, профессор

Программа обсуждена на заседании Кафедры математики и математических методов физики 17.03.2020

## Аннотация

Курс "Аналитическая геометрия" ориентирован на студентов первого курса бакалавриата.

В курсе "Аналитическая геометрия" изучаются основы аналитической геометрии, а также ряд разделов алгебры.

Первая часть курса посвящена изучению векторов, их свойств. Вводятся понятия базиса, системы координат, скалярного, векторного и смешанного произведения.

Во второй части курса изучаются алгебраические линии на плоскости и поверхности в пространстве. Изучается геометрия прямых и плоскостей, решаются позиционные задачи. Рассматриваются линии и поверхности второго порядка, их основные свойства.

Третья часть курса посвящена изучению аффинных и ортогональных преобразований плоскости. Вводится понятие группы. Развивается теория матриц и их определителей. Изучается обратная матрица. Рассматриваются системы линейных уравнений для случая, когда матрица системы - невырожденная квадратная. Выводятся формулы Крамера.

## 1. Цели и задачи

### Цель дисциплины

- формирование базовых знаний по геометрии для дальнейшего использования в других областях математического знания и дисциплинах естественнонаучного содержания;
- формирование математической культуры, исследовательских навыков и способности применять знания на практике.

### Задачи дисциплины

- формирование у обучающихся базовых знаний по аналитической геометрии;
- формирование общематематической культуры: умение логически мыслить, проводить доказательства основных утверждений, устанавливать логические связи между понятиями;
- формирование умений и навыков применять полученные знания для решения геометрических задач, самостоятельного анализа полученных результатов.

## 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
	УК-1.5 Определяет и оценивает практические последствия возможных вариантов решения задачи
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов

## 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны знать:

- основы теории графов, теоремы о вложимости, формулу Эйлера, теорему о раскрасках;
- топологические свойства двумерных поверхностей, теоремы классификации компактных двумерных поверхностей;
- теорию кривых на плоскости и в пространстве, формулы Френе;
- определение кривизны и кручения, теорему о восстановлении кривой по кривизне и кручению; основы теории поверхностей, определение и свойства первой и второй квадратичных форм поверхности, теорему Менье, определение главных кривизн и главных направлений, формулу Эйлера;
- определение ковариантных производных, правила вычисления символов Кристоффеля, уравнения параллельного переноса и геодезических на поверхностях;
- основы сферической геометрии и геометрии Лобачевского, теоремы синусов, косинусов, формулы для суммы углов треугольника на сфере и плоскости Лобачевского.

уметь:

- вычислять инварианты графов, определять топологический тип двумерной поверхности, находить кривизны и кручения кривых, главные кривизны и главные направления поверхностей;
- вычислять ковариантные производные векторных полей на поверхностях, решать задачу параллельного перенесения;
- находить и исследовать геодезические, решать геометрические задачи на сфере и плоскости Лобачевского.

владеть:

- аппаратом теории кривых и поверхностей и его приложениями к механике;
- техникой ковариантных производных и ее приложениями;
- аппаратом теории графов.

#### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

##### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Геометрия кривых и поверхностей в евклидовом пространстве.	10	12		
2	Простейшие неевклидовы геометрии.	8	8		
3	Топология графов и двумерных поверхностей.	12	10		45
Итого часов		30	30		45
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		135 час., 3 зач.ед.			

##### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 2 (Весенний)

###### 1. Геометрия кривых и поверхностей в евклидовом пространстве.

Плоские кривые. Касательная и нормаль. Длина кривой. Натуральный параметр.

Соприкасающаяся окружность. Кривизна плоской кривой. Плоские формулы Френе.

Восстановление плоской кривой по функции кривизны.

Эволюта и волновой фронт плоской кривой.

Кривые в пространстве. Соприкасающаяся окружность. Репер Френе, формулы Френе, кривизна и кручение.  
Восстановление пространственной кривой по кривизне и кручению.  
Поверхности. Первая квадратичная форма. Длины и углы.  
Ковариантные производные векторных полей и их свойства.  
Символы Кристоффеля и их вычисление.  
Параллельный перенос и геодезические на поверхностях.  
Изометрии поверхностей.  
Вторая квадратичная форма поверхности. Теорема Менье.  
Главные кривизны и главные направления. Формула Эйлера. Гауссова и средняя кривизны.  
Отклонение точки поверхности от касательной плоскости. Эллиптические, гиперболические и параболические точки двумерной поверхности.

## 2. Простейшие неевклидовы геометрии.

Геометрия на сфере. Геодезические, изометрии, расстояние, окружности.  
Сферические треугольники. Теоремы косинусов и синусов. Двойственная теорема косинусов. Теорема о сумме углов сферического треугольника.  
Пространство Минковского. Подпространства и ортогональные дополнения. Преобразования Лоренца. Неравенства Коши-Буняковского и треугольника для времениподобных векторов.  
Мировые линии инерциальных наблюдателей. Относительность одновременности, замедление времени, сокращение длин. Парадокс близнецов.  
Векторная модель геометрии Лобачевского. Геодезические, изометрии, окружности, треугольники.  
Модель Пуанкаре геометрии Лобачевского.

## 3. Топология графов и двумерных поверхностей.

Графы. Теорема о числе маршрутов. Уникурсальные графы.  
Число Бетти и эйлерова характеристика графа. Максимальное дерево. Теорема о системе токов.  
Планарные графы. Непланарность полного графа с пятью вершинами и графа «три домика, три колодца».  
Раскраски карт и графов. Теорема о пяти красках.  
Триангулируемые двумерные поверхности. Примеры. Ориентируемые и неориентируемые поверхности.  
Склейки из квадрата. Операции вырезания дырки и приклейки ручки.  
Теорема классификации компактных двумерных ориентируемых поверхностей без края.  
Теоремы о классификации неориентируемых поверхностей и поверхностей с краем.

## 5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

учебная аудитория, оснащенная компьютером и мультимедийным оборудованием (проектор, звуковая система).

## 6. Перечень рекомендуемой литературы

### Основная литература

1. Классическая дифференциальная геометрия [Текст] : учеб. пособие для вузов / А. И. Шафаревич ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т). — М. : МФТИ, 2010. — 124 с.
2. Линейная алгебра [Текст], учебник для вузов / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. -М., Физматлит, 2006, 2007

3. А.А. Ошемков, Ф.Ю. Попеленский, А.А. Тужилин, А.Т. Фоменко, А.И. Шафаревич. Курс наглядной геометрии и топологии. М: URSS, 2014.
4. А.И. Шафаревич. Лекции по дифференциальной геометрии. ИНЕСНЭК, 2007.
5. П.К. Рашевский. Курс дифференциальной геометрии. Наука, 1938.

Дополнительная литература

1. Введение в алгебру : Основы алгебры [Текст] : учебник для вузов / А. И. Кострикин .— М. : Наука, 1994 .— 320 с.

Фонд литературы кафедры

2. Д. Гильберт, С. Кон-Фоссен. Наглядная геометрия. УРСС, 2005.
3. А.Т. Фоменко. Дифференциальная геометрия и топология. Дополнительные главы. РХД, 1999.

**7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

1. <http://math.mipt.ru/study/>
2. <http://dfgm.math.msu.su/materials.php>

**8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

На лекционных занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

Для контроля и коррекции знаний обучающиеся могут использовать компьютерное тестирование, в том числе на портале [www.i-exam.ru](http://www.i-exam.ru).

В процессе самостоятельной работы обучающихся возможно использование таких программных средств, как Mathcad, Scilab и др.

**9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

Успешное освоение курса требует напряжённой самостоятельной работы студента. В программе курса приведено минимально необходимое время для работы студента над темой.

Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение и конспектирование рекомендованной литературы;
- проработку учебного материала (по конспектам лекций, учебной и научной литературе), подготовку ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения, доказательство отдельных утверждений, свойств; – решение задач, предлагаемых студентам на лекциях и практических занятиях, – подготовку к практическим занятиям, коллоквиумам, зачёту. Руководство и контроль за самостоятельной работой студента осуществляется в форме индивидуальных консультаций. Показателем владения материалом служит умение решать задачи. Для формирования умения применять теоретические знания на практике студенту необходимо решать как можно больше задач. При решении задач каждое действие необходимо аргументировать, ссылаясь на известные теоретические сведения. Значительно облегчить решение задачи может хорошо выполненный чертёж, если он соответствует условию задачи (прямой угол нарисован прямым, равнобедренный треугольник – равнобедренным и т. д. При подготовке к практическим занятиям необходимо повторять ранее изученные основные определения, формулировки теорем. В начале занятия, как правило, проводится короткий (10-15 минут) опрос по материалу прошедших занятий в устной или письменной форме. Обычно придерживаются следующей схемы: изучение материала лекции по конспекту в тот же день, когда была прослушана лекция (10-15 минут); повторение материала накануне следующей лекции (10-15 минут), проработка учебного материала по конспектам лекций, учебной и научной литературе, подготовка ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения, подготовка к практическому занятию, решение задач. При затруднении изучения отдельных тем, вопросов, следует обращаться за консультациями к лектору или преподавателю, ведущему практические занятия.

Обязательным требованием является выполнение домашних работ, которые оформляются в специально отведённой для этого тетради и систематически сдаются на проверку.

Промежуточный контроль знаний проводится в виде коллоквиумов, на которых студенту предлагается письменно ответить на теоретический вопрос и решить две задачи по теме коллоквиума, а также студенту в ходе освоения курса необходимо выполнить две домашних индивидуальных работы с их последующей защитой.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

<b>по направлению:</b>	Прикладные математика и физика
<b>профиль подготовки:</b>	Физика атомных ядер и элементарных частиц, физика высоких энергий Физтех-школа природоподобных, плазменных и ядерных технологий им. И.В. Курчатова кафедра математики и математических методов физики
<b>курс:</b>	<u>1</u>
<b>квалификация:</b>	бакалавр
Семестр, формы промежуточной аттестации: 2 (весенний) - Экзамен	
<b>Разработчик:</b>	А.И. Шафаревич, д-р физ.-мат. наук, профессор, профессор

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
	УК-1.5 Определяет и оценивает практические последствия возможных вариантов решения задачи
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Аналитическая геометрия» обучающийся должен:

### знать:

- основы теории графов, теоремы о вложимости, формулу Эйлера, теорему о раскрасках;
- топологические свойства двумерных поверхностей, теоремы классификации компактных двумерных поверхностей;
- теорию кривых на плоскости и в пространстве, формулы Френе;
- определение кривизны и кручения, теорему о восстановлении кривой по кривизне и кручению; основы теории поверхностей, определение и свойства первой и второй квадратичных форм поверхности, теорему Менье, определение главных кривизн и главных направлений, формулу Эйлера;
- определение ковариантных производных, правила вычисления символов Кристоффеля, уравнения параллельного переноса и геодезических на поверхностях;
- основы сферической геометрии и геометрии Лобачевского, теоремы синусов, косинусов, формулы для суммы углов треугольника на сфере и плоскости Лобачевского.

### уметь:

- вычислять инварианты графов, определять топологический тип двумерной поверхности, находить кривизны и кручения кривых, главные кривизны и главные направления поверхностей;
- вычислять ковариантные производные векторных полей на поверхностях, решать задачу параллельного перенесения;
- находить и исследовать геодезические, решать геометрические задачи на сфере и плоскости Лобачевского.

### владеть:

- аппаратом теории кривых и поверхностей и его приложениями к механике;
- техникой ковариантных производных и ее приложениями;
- аппаратом теории графов.

## 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

В целях текущего контроля успеваемости предусмотрен краткий опрос по темам предыдущих занятий по теме прошлой лекции или в конце занятия по пройденной теме.



### **3. Перечень типовых контрольных заданий, используемых для оценки знаний, умений, навыков**

Промежуточная аттестация по дисциплине «Аналитическая геометрия» осуществляется в форме экзамена. Экзамен проводится в устной форме.

#### **Перечень контрольных вопросов для сдачи экзамена в 2 семестре:**

1. Графы. Теорема о числе маршрутов. Уникурсальные графы.
2. Число Бетти и эйлерова характеристика графа. Максимальное дерево. Теорема о системе токов.
3. Планарные графы. Непланарность полного графа с пятью вершинами и графа «три домика, три колодца».
4. Раскраски карт и графов. Теорема о пяти красках.
5. Замкнутые кривые на плоскости. Регулярная гомотопия кривых. Теорема Уитни – Грауштейна.
6. Триангулируемые двумерные поверхности. Примеры. Ориентируемые и неориентируемые поверхности.
7. Склейки из квадрата. Операции вырезания дырки и приклейки ручки.
8. Теорема классификации компактных двумерных ориентируемых поверхностей.
9. Теорема классификации неориентируемых поверхностей.
10. Плоские кривые. Касательная и нормаль. Длина кривой. Натуральный параметр.
11. Соприкасающаяся окружность. Кривизна плоской кривой. Плоские формулы Френе.
12. Восстановление плоской кривой по функции кривизны.
13. Кривые в пространстве. Соприкасающаяся окружность. Репер Френе, формулы Френе, кривизна и кручение.
14. Восстановление пространственной кривой по кривизне и кручению.
15. Поверхности. Первая квадратичная форма. Длины и углы.
16. Ковариантные производные векторных полей и их свойства.
17. Символы Кристоффеля и их вычисление.
18. Параллельный перенос и геодезические на поверхностях.
19. Изометрии поверхностей.
20. Вторая квадратичная форма поверхности. Теорема Менье.
21. Главные кривизны и главные направления. Формула Эйлера. Гауссова и средняя кривизны.
22. Отклонение точки поверхности от касательной плоскости. Эллиптические, гиперболические и параболические точки двумерной поверхности.
23. Геометрия на сфере. Геодезические, изометрии, расстояние, окружности.
24. Сферические треугольники. Теоремы косинусов и синусов. Двойственная теорема косинусов. Теорема о сумме углов сферического треугольника.
25. Модель Пуанкаре геометрии Лобачевского. Свойства дробно-линейных преобразований. Изометрии и геодезические.

#### **Примеры экзаменационных билетов:**

##### **Билет 1**

1. Графы. Теорема о числе маршрутов. Уникурсальные графы.
2. Восстановление плоской кривой по функции кривизны.

##### **Билет 2**

1. Триангулируемые двумерные поверхности. Примеры. Ориентируемые и неориентируемые поверхности.
2. Вторая квадратичная форма поверхности. Теорема Менье.

### Билет 3

1. Теорема классификации неориентируемых поверхностей.
2. Геометрия на сфере. Геодезические, изометрии, расстояние, окружности.

### 4. Критерии оценивания

Оценка	Баллы	Критерии
отлично	10	Выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины, проявляющему интерес к данной предметной области, продемонстрировавшему умение уверенно и творчески применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.
	9	Выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.
	8	Выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, правильное обоснование принятых решений, с некоторыми недочетами.
хорошо	7	Выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но недостаточно грамотно обосновывает полученные результаты.
	6	Выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности.
	5	Выставляется студенту, если он в основном знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач достаточно большое количество неточностей.
удовлетворительно	4	Выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической

		последовательности в изложении программного материала, но при этом он освоил основные разделы учебной программы, необходимые для дальнейшего обучения, и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации.
	3	Выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, допускающему ошибки в формулировках базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, слабо владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и с трудом применяет полученные знания даже в стандартной ситуации.
неудовлетворительно	2	Выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных принципов и не умеет использовать полученные знания при решении типовых задач.
	1	Выставляется студенту, который не знает основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубейшие ошибки в формулировках базовых понятий дисциплины и вообще не имеет навыков решения типовых практических задач.

## **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

При проведении экзамена обучающемуся предоставляется не менее 40 минут на подготовку. Опрос по билету и ответы на дополнительные вопросы не должны превышать двух астрономических часов. По завершении отведенного на опрос времени, экзаменатор должен выставить обучающемуся экзаменационную оценку.